Solution 13 :

1°/ g est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2}\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(x^2+1)^3}} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-1	↗	0

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{-2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - \frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - \frac{1}{2} = -1$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - \frac{1}{2} = 0$.

2°/ g est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc g réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $g(\mathbf{R}) =]-1,0[$.

3°/a) On a : $\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2+1>0$ donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et comme la fonction $x \mapsto \frac{-x}{2}+1$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de ces 2 fonction dérivables.

$\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = g(x)$.

b) On a $g(\mathbf{R}) =]-1,0[$ donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $g(x)<0$ et par suite $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x)<0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1